

A végtelen határán innen és túl

Székely Gergely

NKE HHK Természettudományi Tanszék & RAMKI

2022. április 25.

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (10%)

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

00 01 02 ③ 04 05 06 07 08 09

10 11 12 ⑬ 14 15 16 17 18 19

20 21 22 ⑳ 24 25 26 27 28 29

③① ③② ③③ ③④ ③⑤ ③⑥ ③⑦ ③⑧ ③⑨ (19%)

40 41 42 ④③ 44 45 46 47 48 49

50 51 52 ⑤③ 54 55 56 57 58 59

60 61 62 ⑥③ 64 65 66 67 68 69

70 71 72 ⑦③ 74 75 76 77 78 79

80 81 82 ⑧③ 84 85 86 87 88 89

90 91 92 ⑨③ 94 95 96 97 98 99

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

jegyek száma	%
1	10%
2	19%
3	27,1%
4	34,39%
5	40,95%
6	46,86%
⋮	⋮

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

jegyek száma	%
1	10%
2	19%
3	27,1%
4	34,39%
5	40,95%
6	46,86%
⋮	⋮

A legfeljebb n jegyű 3-ast tartalmazó számok aránya:

$$\frac{10^n - 9^n}{10^n}$$

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

jegyek száma	%
1	10%
2	19%
3	27,1%
4	34,39%
5	40,95%
6	46,86%
⋮	⋮

A legfeljebb n jegyű 3-ast tartalmazó számok aránya:

$$\frac{10^n - 9^n}{10^n} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Majdnem minden természetes számban szerepel a 3-as számjegy!

jegyek száma	%
1	10%
2	19%
3	27,1%
4	34,39%
5	40,95%
6	46,86%
⋮	⋮

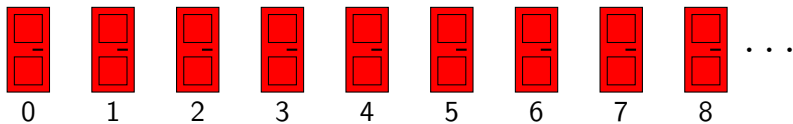
A legfeljebb n jegyű 3-ast tartalmazó számok aránya:

$$\frac{10^n - 9^n}{10^n} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \rightarrow 1$$

Egy random 3000 jegyű szám:

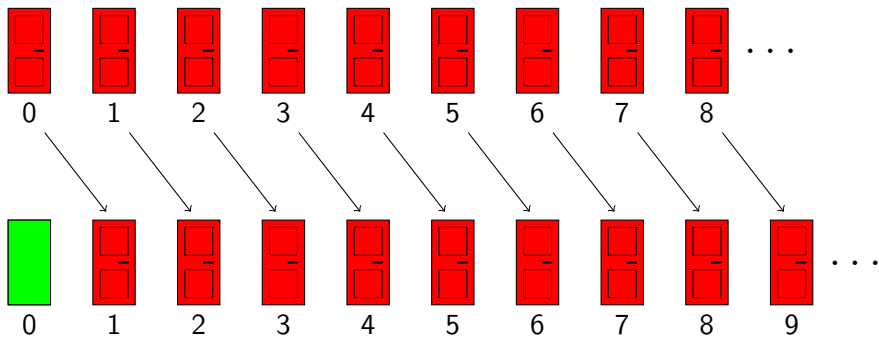
8117270449993287474946046636773151805352025855186761127119874224856941067837416647238534949993387160
3294801174226087343846867278315722326412231092677863107086238418646218592893016157900628650569026287
13837500530391188825770952337785927504951978432682126793312659857269230503850398592975860462874165647
9823099912518379341797277181562799188021070528627167890241440516487858408505057499710185986295285538
895696127154123202411018990309771728020322072056708984996112625172653309900746467604438600016287906
3344587737906431537384677349166622196958819173360824881399571858005787020339205077565337635339393810
2854555172502153151668167301402224663337960334288400324232589246494209806858222236502085138094759760
6193790246454262506079114023286972998832654749657606946895935949673939837104752976499005504600012480
5806925488429759757725585926352224611898542721643059940017035461311070750984776820423086586469277475
7975692191932303560542388888469354388109185895518788322953809392243285346081681247378208907860083442
5129876378645742191225211375081831861055403973805678523141711544466890825159441529876067042095749238
9450650389622810936075902450324885144592094796448975978515271714772464348460663090591401317397476577
5709903783407047742027564068234190935358062567496203542700431574998071406908259392164545874373291327
9689601612987486118065216607380404337974253604379458717796727790464314813056684537964221479297011237
57276654826985874260488943741018797225837973332610051680754523039646119087415353423903008381022214763
4479762863552760847018387610584278546397017512358996795173970945288007370879345001983862302139308
85155579373624917264363329507261874432337782339346575274186976252421536427104480525061055873289
3251020185151531306774164718874374971981605100911235510832343798785728132395679265221596349270181590
5493721584566952049259284155278060676093850781870554045982844939718814472623071823990454697617814080
3788566019646514242655804754830383281084082312402113750030204292557651655145928447349882090048361923
9677648813909273924030709207305735105924374760988931481232189430244648465413173708956449450823739934
5870448665960580758239419203033890640235074840107321415992320845136502540265713922959802964829147314
5833133839718463613975098286543136504790113513437369029768866132355671280466799609257700820690829629
1461972485114560645633529887788079123793612547215083473572018841372575381618954770539541758169980123
9491554964603795583807186123435174278602724263656264638164291212845216220021699476199564446388100136
1482071449796572356169629267552731245480323606247710819881564213841440548629845283648099829779313513
5261776928760570113471755219669252325573548483807855148414597988790488106670727106898401305285958577
38342432542320020825997670243463111518903616589862269456417970193158643358231765453058109699051447
5072503790372416660438496825716297587270761521740333031012519955959540846094726813201771520062444084
1411538033714851505955179949824199349293216094700061011970255789546534035227263171733885030509063834

Hilbert Hotel



Telt ház van. Jön egy új vendég. El tudjuk-e szállásolni?

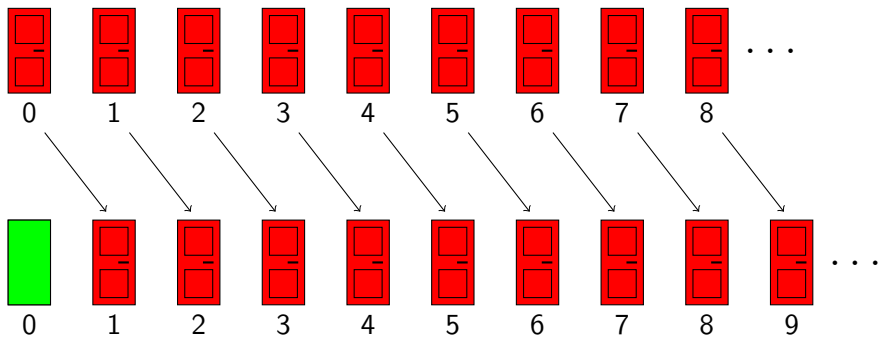
Hilbert Hotel



Telt ház van. Jön egy új vendég. El tudjuk-e szállásolni?

$$n \mapsto n + 1$$

Hilbert Hotel

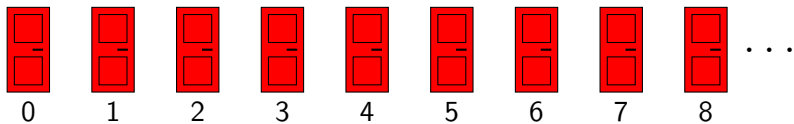


Telt ház van. Jön egy új vendég. El tudjuk-e szállásolni?

$$n \mapsto n + 1$$

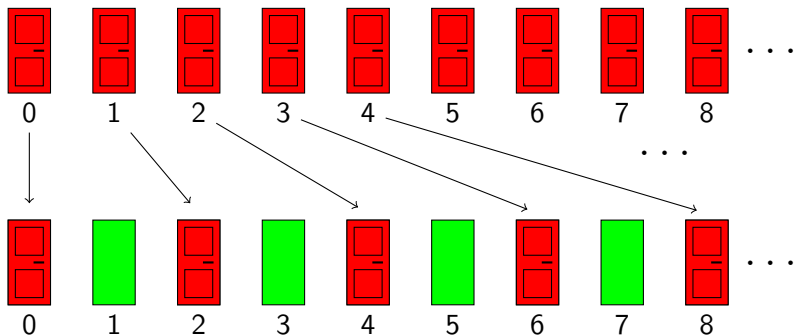
$$\boxed{\infty + 1 = \infty}$$

Hilbert Hotel



Tudunk-e átrendezéssel végtelen sok szobát felszabadítani?

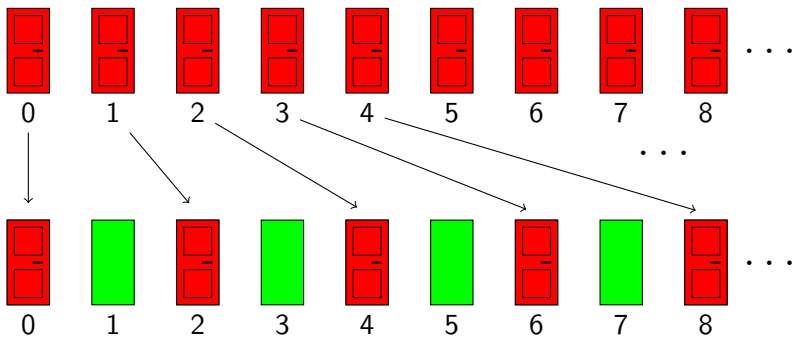
Hilbert Hotel



Tudunk-e átrendezéssel végtelen sok szobát felszabadítani?

$$n \mapsto 2 \cdot n$$

Hilbert Hotel

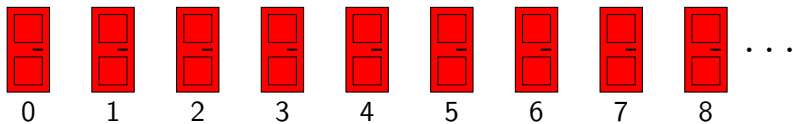


Tudunk-e átrendezéssel végtelen sok szobát felszabadítani?

$$n \mapsto 2 \cdot n$$

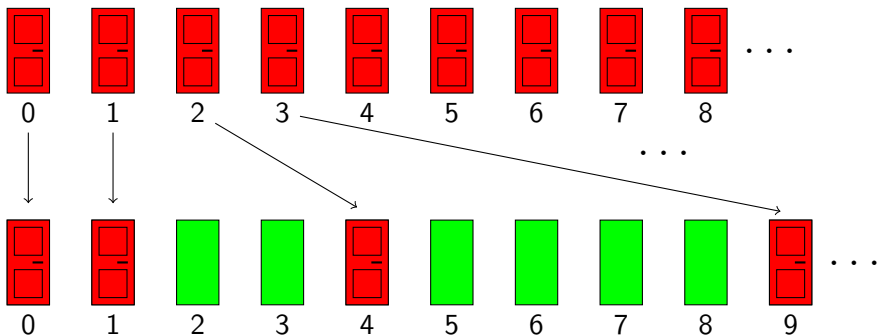
$$\infty + \infty = 2 \cdot \infty = \infty$$

Hilbert Hotel



El tudjuk-e érni átrendezéssel, hogy tetszőlegesen sok egymás melletti üres szoba legyen?

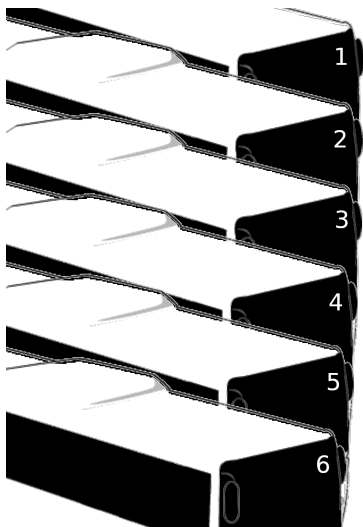
Hilbert Hotel



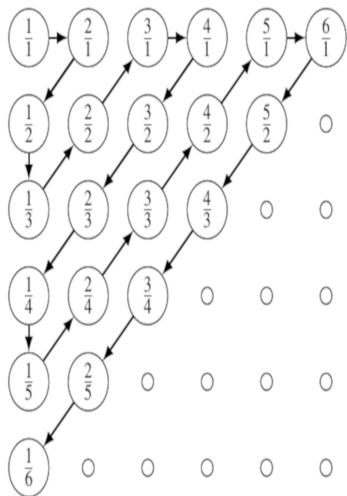
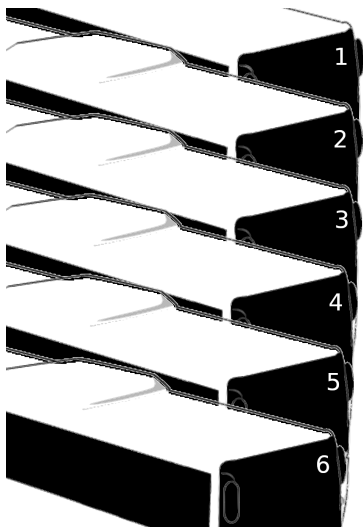
El tudjuk-e érni átrendezéssel, hogy tetszőlegesen sok egymás melletti üres szoba legyen?

$$n \mapsto n^2$$

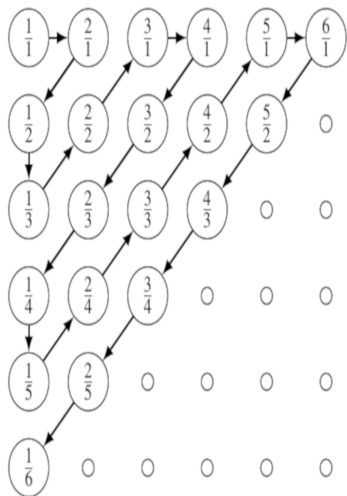
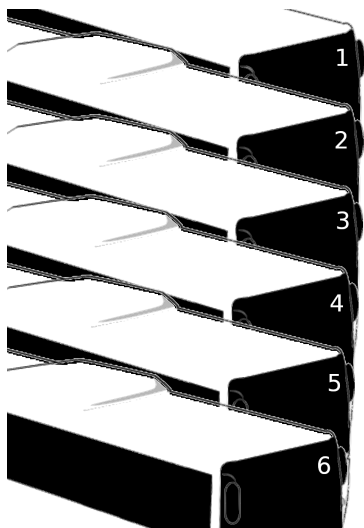
Hilbert Hotel



Hilbert Hotel



Hilbert Hotel



$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

Hilbert Hotel

Tud-e olyan sok vendég jönni, amennyit nem tudunk elszállásolni?

Hilbert Hotel

Tud-e olyan sok vendég jönni, amennyit nem tudunk elszállásolni?

Igen. Pl., ha $|\mathbb{R}|$ sok vendég jön.

Hilbert Hotel

Tud-e olyan sok vendég jönni, amennyit nem tudunk elszállásolni?

Igen. Pl., ha $|\mathbb{R}|$ sok vendég jön. $|\mathbb{R}| = |[0, 1]|$

1 : 0,4103396796774...

2 : 0,5225521097568...

3 : 0,9793152283822...

4 : 0,5810337831575...

⋮ ⋮ ⋮

Hilbert Hotel

Tud-e olyan sok vendég jönni, amennyit nem tudunk elszállásolni?

Igen. Pl., ha $|\mathbb{R}|$ sok vendég jön. $|\mathbb{R}| = |[0, 1]|$

1 : 0, ~~4~~⁵103396796774 ...

2 : 0, ~~5~~³225521097568 ...

3 : 0, ~~9~~⁰73152283822 ...

4 : 0, ~~5~~¹810337831575 ...

⋮ ⋮ ⋮

0, **5301** ... $\in [0, 1]$, de nincs rajta a listán ...

Hilbert Hotel

Tud-e olyan sok vendég jönni, amennyit nem tudunk elszállásolni?

Igen. Pl., ha $|\mathbb{R}|$ sok vendég jön. $|\mathbb{R}| = |[0, 1]|$

1 : 0, ~~4~~⁵103396796774...

2 : 0, ~~5~~³225521097568...

3 : 0, ~~9~~⁰773152283822...

4 : 0, ~~5~~¹810337831575...

⋮ ⋮ ⋮

0, **5301**... $\in [0, 1]$, de nincs rajta a listán...

$$\boxed{2^\infty > \infty} \quad |\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

Van-e végtelen $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között?

Van-e végtelen $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között?

Nem tudjuk...

Van-e végtelen $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között?

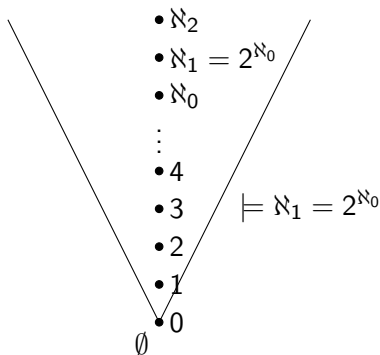
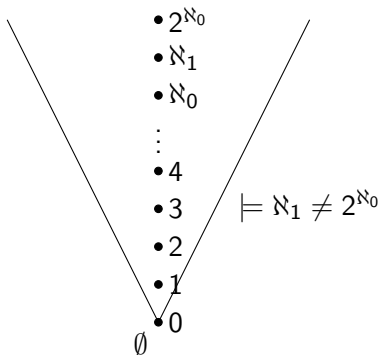
Nem tudjuk...

Kontinuumhipotézis: Nincs, azaz $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Van-e végtelen $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között?

Nem tudjuk...

Kontinuumhipotézis: Nincs, azaz $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.



Van olyan világ, ahol nem igaz a kontinuumhipotézis és olyan is van, ahol igaz.

Van-e nagyobb végtelen, mint $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$? Ha igen, hány van?

Van-e nagyobb végtelen, mint $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$? Ha igen, hány van?

Van. Végtelen sok.

Van-e nagyobb végtelen, mint $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$? Ha igen, hány van?

Van. Végtelen sok.

Sőt, olyan sok van, hogy bele se férnek egy halmazba...

Van-e nagyobb végtelen, mint $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$? Ha igen, hány van?

Van. Végtelen sok.

Sőt, olyan sok van, hogy bele se férnek egy halmazba...

Azaz, olyan végtelen sok különböző végtelen van, hogy olyan sok már nincs is...

Van-e nagyobb végtelen, mint $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$? Ha igen, hány van?

Van. Végtelen sok.

Sőt, olyan sok van, hogy bele se férnek egy halmazba...

Azaz, olyan végtelen sok különböző végtelen van, hogy olyan sok már nincs is...

Köszönöm a figyelmet!